問）$x+y+z=0$、$x^3+y^3+z^3=3$、$x^5+y^5+z^5=15$
のとき、$x^2+y^2+z^2$の値を求めよ。ただし、x、y、zは実数とする。
（２０１８　静岡大学）

解）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

より　$3-3xyz=0$　　$\underline{\therefore xyz=1}$

$xy+yz+zx=a$　とおくと

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

より　$\underline{x^2+y^2+z^2=-2a}$

ところで　x、y、zを解とする３次方程式は

$$(t-x)(t-y)(t-z)=0$$

展開すると　$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$

整理すると　$\underline{t^3+at-1=0}$　となる。

両辺をt^2倍すると　　$t^5+at^3-t^2=0$

x、y、zを代入し、辺々加えると

$$x^5+y^5+z^5+a(x^3+y^3+z^3)-(x^2+y^2+z^2)=0$$

$15+3a+2a=0$　　$5a=-15$　　$\underline{\therefore a=-3}$

$\underline{\text{（答え）}x^2+y^2+z^2=-2a=6}$