

問) $x^5+16x+32$ を因数分解せよ。

$\omega^3=1$ となる複素数を ω とする。 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ より

$\omega \neq 1$ で $\omega^2+\omega+1=0$

$f(x)=x^5+16x+32$ とおくと、 $f(2\omega)=0$ $f(2\omega^2)=0$ を確認しよう。

$$f(2\omega)=(2\omega)^5+16(2\omega)+32=32\omega^5+32\omega+32=32(\omega^5+\omega+1)=32(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$f(2\omega^2)=(2\omega^2)^5+16(2\omega^2)+32=32\omega^{10}+32\omega^2+32=32(\omega^{10}+\omega^2+1)=32(\omega+\omega^2+1)=0$$

ゆえに $x^5+16x+32$ は、 $(x-2\omega)(x-2\omega^2)$ で割り切れる。

$$(x-2\omega)(x-2\omega^2)=x^2-2(\omega+\omega^2)x+4\omega^3=x^2+2x+4$$

$$\text{ゆえに、 } x^5+16x+32=(x^2+2x+4)(x^3-2x^2+8)$$