問)(1)n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数を求めよ。ただし、n は自然数とする。

$5n^2+9=5(n^2+1)+4$ より

ユークリッドの互除法から、$gcd(n^2+1,5n^2+9)=gcd(n^2+1,4)$

n が偶数のとき、n^2+1 は奇数より、$gcd(n^2+1,4)=1$

n が奇数のとき、n^2+1 は偶数なので、$gcd(n^2+1,4)=2$ または 4

具体的に $n=2m-1$ とおくと $(2m-1)^2+1=4m^2-4m+2$ なので $gcd(n^2+1,4)=2$

問）(2)$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とはならないことを示せ。

n が偶数のとき、n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素なので、平方数となる

ためには、n^2+1 と $5n^2+9$ のそれぞれが平方数となることが必要である。

n^2+1 に着目すると、$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ なので、平方数と平方数の間

の数なので、平方数にはならない。

ゆえに、$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とはならない

n が奇数のとき、$gcd(n^2+1,4)=2$ より

$(n^2+1)(5n^2+9)=2\times\frac{n^2+1}{2}\times2\times\frac{5n^2+9}{2}=2^2\times\frac{n^2+1}{2}\frac{5n^2+9}{2}$

と変形できる。

やはり、$(n^2+1)(5n^2+9)$ が平方数となるためには、$\frac{n^2+1}{2}$ と $\frac{5n^2+9}{2}$ は

互いに素なので、$\frac{n^2+1}{2}$ と $\frac{5n^2+9}{2}$ はともに、平方数とならなければならない。

$\frac{5n^2+9}{2}$ に着目すると、$n=2m-1$ を代入すると、

$\frac{5(2m-1)^2+9}{2}=\frac{20m^2-20m+5+9}{2}=10m^2-10m+7$

となる。

mod5 で考えると、$10m^2-10m+7\equiv2$ である。

平方数は、5 で割ったときの余りは、$0,1,4$ なので、$\frac{5n^2+9}{2}$ は

平方数にはならない。

ゆえに、結果として、$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数にはならない。