問）<u>複素数 $(\frac{1+\sqrt{7}i}{2})^{10}$ の虚部を求めよ。</u>

ただし、$\frac{1+\sqrt{7}i}{2} = r(cos\alpha + isin\alpha)$ としたとき、

$sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$、そして $\frac{3}{8}\pi < \alpha < \frac{12}{31}\pi$ とする。

解)$\alpha = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ とおく。

$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 2$

$A_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと　$A_{n+2} = A_{n+1} - 2A_n$

$A_1 = 1, A_2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2*2 = -3$

$A_3 = A_2 - 2A_1 = -3 - 2*1 = -5$
$A_4 = A_3 - 2A_2 = -5 - 2*(-3) = 1$
$A_5 = A_4 - 2A_3 = 1 - 2*(-5) = 11$
$A_6 = A_5 - 2A_4 = 11 - 2*1 = 9$
$A_7 = A_6 - 2A_5 = 9 - 2*11 = -13$
$A_8 = A_7 - 2A_6 = -13 - 2*9 = -31$
$A_9 = A_8 - 2A_7 = -31 - 2*(-13) = -5$
$A_{10} = A_9 - 2A_8 = -5 - 2*(-31) = 57$

$(\frac{1+\sqrt{7}i}{2})^{10} = \frac{57}{2} + bi$ とおく。

$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \sqrt{2}$ より　　$r^{10} = 32$

$32^2 = (\frac{57}{2})^2 + b^2$　より　　$b = \pm\frac{11\sqrt{7}}{2}$

$\frac{30}{8}\pi < 10\alpha < \frac{120}{31}\pi$ より 10α は第４象限で、$sin 10\alpha < 0$

<u>ゆえに、求める虚部の値は $-\frac{11\sqrt{7}}{2}$ となる。</u>