問）$\underline{k^2 = 3^n + 360 \cdots (1)\text{ を満たす整数 } k, n \text{ を求めよ。}}$

解)mod4 で考えると

$k^2 \equiv 0, 1$ であり、$3^n + 360 \equiv (-1)^n \equiv \pm 1$

ゆえに、n は偶数である。$n = 2b$ とおく。

$k^2 = 3^{2b} + 360$ より $k^2 - 3^{2b} = 360$
因数分解して $(k + 3^b)(k - 3^b) = 2^3 3^2 5$

$(k+3^b, k-3^b) = (360, 1), (180, 2), (120, 3), (90, 4), (72, 5), (60, 6), (45, 8)$
$, (40, 9), (, 36, 10), (, 30, 12), (24, 15), (20, 18)$

k が整数になるのは、$(180, 2), (90, 4), (60, 6), (36, 10), (30, 12), (20, 18)$
でさらに、b が整数になるのは、次の３パターンである。

$(k + 3^b, k - 3^b) = (60, 6)$ のとき、$2 \times 3^b = 54$ で $3^b = 27$

ゆえに $b = 3$

$(k + 3^b, k - 3^b) = (30, 12)$ のとき、$2 \times 3^b = 18$ で $3^b = 9$

ゆえに $b = 2$

$(k+3^b, k-3^b)=(20,18)$ のとき、$2\times 3^b=2$ で $3^b=1$
ゆえに $b=0$。整理すると

$\underline{(k,n)=(\pm\,33,6),(\pm\,21,4),(\pm\,19,0)}$となる。