問）$\underline{\frac{A}{2^a} - \frac{B}{3^b} - \frac{1}{5^4} = \frac{337}{2^a 3^b 5^4}}$ $\cdots(1)$ を満たす整数 A を求めよ。ただし、$1 \leqq B \leqq 9$、$2 \leqq a, b \leqq 5$ とする。

解)(1) の左辺を通分して、分子を比較すると

$A3^b5^4 - B2^a5^4 - 2^a3^b = 337 \cdots (2)$

となる。a, b は 2 以上なので、$B2^a5^4$ と 2^a3^b は偶数。ゆえに、$A3^b5^4$ は奇数となる。A は奇数である。

下 2 桁に着目してみよう。

$5^4 = 625$ なので、$A3^b5^4$ の下 2 桁は、25 か 75 となる。次に、$B2^a5^4$ の下 2 桁は 00 となる。

2^a3^b の下 2 桁は、38 か 88 と必然としてなる。

2^a3^b の値で、条件を満たすものは、１６通りの値を検証すると、$(a, b) = (4, 5), (5, 2)$ の２通りだということがわかる。

2^a3^b の値はそれぞれ 3888 と 288 となる。さらに、この２つを検証すると

$(a, b) = (4, 5)$ のとき、$A3^55^4 - B2^45^4 - 3888 = 337$ ゆえに、

$A3^5 5^4 - B2^4 5^4 = 4225$　　4225 は 5^4 で割れないので、不適。

$(a,b)=(5,2)$ のとき、$A3^2 5^4 - B2^5 5^4 - 288 = 337$ ゆえに、$A3^2 5^4 - B2^5 5^4 = 625$　両辺を 5^4 で割ると

$A3^2 - B2^5 = 1$　　　　$9A = 32B + 1$

B に 1 から 9 まで順番に値を代入すると、33、65、97、129、161、193、225、257、289 となり、9 で割れるのは 225 のみ。

ゆえに、$\underline{A=25}$となる。