

$$\text{問)} \left\{ \begin{array}{l} ax+by=4 \quad ax^2+by^2=2 \\ ax^3+by^3=6 \quad ax^4+by^4=38 \end{array} \right. \quad \text{のとき、} ax^5+by^5 \text{の値を求めよ。}$$

$A_n = ax^n + by^n$ とおく。

$$\begin{aligned} (x+y) A_n &= (x+y) (ax^n + by^n) = ax^{n+1} + by^{n+1} + ax^n y + bxy^n \\ &= ax^{n+1} + by^{n+1} + xy(ax^{n-1} + by^{n-1}) = A_{n+1} + xyA_{n-1} \end{aligned}$$

ゆえに、 $A_{n+1} - (x+y) A_n + xyA_{n-1} = 0$ ただし、 $n \geq 2$ とする。

$$n=4 \text{ のとき } A_4 - (x+y) A_3 + xyA_2 = 0 \quad 38 - (x+y)6 + xy2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$n=3 \text{ のとき } A_3 - (x+y) A_2 + xyA_1 = 0 \quad 6 - (x+y)2 + xy4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}、\textcircled{2} \text{ より } \underline{x+y=7、xy=2}$$

$$A_5 - 7A_4 + 2A_3 = 0 \quad \text{となるので、} \underline{ax^5 + by^5 = 7 \times 38 - 2 \times 6 = 254}$$